Lineare Gleichungen mit 3 Unbekannten

Aufgabe 1)

Löse folgende Gleichungssysteme nach einem Verfahren deiner Wahl

a)
I: $2a+3b+4c=20$
II: $4a+b+2c=12$
III: $3b+3c=15a$

b)
I: $a+b+c=10$
II: $4a-3b=4c-3b$
III: $0,5a+0,25b-1,5c=-2$

c)
I: $20x+5b+y=42,5$
II: $x+y+b=6$
III: $3b-4x+y=2,5$

d)
I: $3a+9b+6c=33$
II: $a+b-4c=4$
III: $a+2b-3a+4c+a-3b=-8a$

Aufgabe 2)

Gabi, Claus und Larissa sitzen am Rhein in einem Cafe. Nach drei Stunden wollen sie in einen Spaziergang am Rhein machen; zuerst müssen sie jedoch bezahlen.

Gabi hat eine Cola zwei Kaffee und eine Apfelschorle und bezahlt 6,30€.

Claus weis nur noch „Ich hatte jede halbe Stunde was zu trinken. Ich hab abwechselnd Cola und Apfelschorle getrunken“ Die Kellnerin verlangt 9,30€ von ihm.

Larissa hatte einen Kaffee und drei Apfelschorlen. Sie bezahlt auch 6,30€.

Was kosten die einzelnen Getränke?

Aufgabe 3)

Im Schreibwarenladen:

Heinz kauft ein Dutzend Hefte und drei Kugelschreiber. Er bezahlt 12,57€.

Lisa braucht zwei Dutzend Hefte. Sie bezahlt 6,63€ mehr als Heinz.

Peer kauft nur ein Heft und einen Druckbleistift und bezahlt 5,79€.

Was kosten die Artikel?

Aufgabe 4)

Löse die Gleichungssysteme:

a)
I: $3a+2c-2,5b=4c+a-(5b-1a)$
II: $4b+a=3c$
III: $4a+3c-b=3c+b$

b)
I: $z=2y+2x$
II: $2z-10x=5$
III: $3y-2x=z-2,5$

c)
I: $3b-6a=c+9$
II: $a+b+c=3b$
III: $11b-6a=15c+1$

d)
I: $a+2b-3c=0$
II: $5a+3b=6c+5$
III: $12a+4b=50-4c$

LÖSUNGSBLATT:

Aufgabe 1)

Löse folgende Gleichungssysteme nach einem Verfahren deiner Wahl

a)

$$\text{I: } 2a+3b+4c=20$$

$$\text{II: } 4a+b+2c=12$$

$$\text{III: } 3b+3c=15a$$

$$\text{Lösung: } a=1, b=2, c=3$$

c)

$$\text{I: } 20x+5b+y=42,5$$

$$\text{II: } x+y+b=6$$

$$\text{III: } 3b-4x+y=2,5$$

$$\text{Lösung: } x=1,5 \quad b=2 \quad y=2,5$$

b)

$$\text{I: } a+b+c=10$$

$$\text{II: } 4a-3b=4c-3b$$

$$\text{III: } 0,5a+0,25b-1,5c=-2$$

$$a=3 \quad b=4 \quad c=3$$

d)

$$\text{I: } 3a+9b+6c=33$$

$$\text{II: } a+b-4c=4$$

$$\text{III: } a+2b-3a+4c+a-3b=-8a$$

$$a=0,5 \quad b=3,5 \quad c=0$$

Aufgabe 2)

Gabi, Claus und Larissa sitzen am Rhein in einem Cafe. Nach drei Stunden wollen sie in einen Spaziergang am Rhein machen; zuerst müssen sie jedoch bezahlen.

Gabi hat eine Cola zwei Kaffee und eine Apfelschorle und bezahlt 6,30€.

Claus weis nur noch „Ich hatte jede halbe Stunde was zu trinken. Ich hab abwechselnd Cola und Apfelschorle getrunken“ Die Kellnerin verlangt 9,30€ von ihm.

Larissa hatte einen Kaffee und drei Apfelschorlen. Sie bezahlt auch 6,30€.

Was kosten die einzelnen Getränke?

$$\text{Lösung: } \quad \text{Cola}=C \quad \text{Apfelschorle}=A \quad \text{Kaffee}=K$$

$$\text{I: } C+2K+A=6,30$$

$$\text{II: } 3A+3K=9,30$$

$$\text{III: } K+3A=6,30$$

$$C=1,70\text{€} \quad A=1,60\text{€} \quad K=1,50\text{€}$$

Aufgabe 3)

Im Schreibwarenladen:

Heinz kauft ein Dutzend Hefte und drei Kugelschreiber. Er bezahlt 12,57€.

Lisa braucht zwei Dutzend Hefte. Sie bezahlt 6,63€ mehr als Heinz.

Peer Kauft nur ein Heft und einen Druckbleistift und bezahlt 5,79€.

Was kosten die Artikel?

Lösung:

$$\text{Heft} = H \quad \text{Kugelschreiber} = K \quad \text{Druckbleistift} = D$$

$$\text{I: } 12H+3K=12,57$$

$$\text{II: } 24H=12,57+6,63$$

$$\text{III: } H+D=5,79$$

$$\text{Ein Heft kostet } 0,80\text{€}, \text{ ein Kugelschreiber } 0,99\text{€} \text{ und ein Druckbleistift kostet } 4,99\text{€}.$$

Aufgabe 4)

Löse die Gleichungssysteme:

a)

$$\text{I: } 3a+2c-2,5b=4c+a-(5b-1a)$$

$$\text{II: } 4b+a=3c$$

$$\text{III: } 4a+3c-b=3c+b$$

$$\text{Lösung: } a=1 \quad b=2 \quad c=3$$

c)

$$\text{I: } 3b-6a=c+9$$

$$\text{II: } a+b+c=3b$$

$$\text{III: } 11b-6a=15c+1$$

$$\text{Lösung: } a=-2 \quad b=-1 \quad c=0$$

b)

$$\text{I: } z=2y+2x$$

$$\text{II: } 2z-10x=5$$

$$\text{III: } 3y-2x=z-2,5$$

$$x=1,5 \quad y=3,5 \quad z=10$$

d)

$$\text{I: } a+2b-3c=0$$

$$\text{II: } 5a+3b=6c+5$$

$$\text{III: } 12a+4b=50-4c$$

$$a=b=c=2,5$$

Lösungsskizze

a)

$$\text{I: } 2a+3b+4c=20$$

$$\text{II: } 4a+b+2c=12$$

$$\text{III: } 3b+3c=15a$$

$$\text{Lösung: } a=1, b=2, c=3$$

b)

$$\text{I: } a+b+c=10$$

$$\text{II: } 4a-3b=4c-3b \quad | +3b \quad \rightarrow \quad 4a = 4c \quad \rightarrow \quad a = c$$

$$\text{III: } 0,5a+0,25b-1,5c=-2$$

$$\text{II in I = IV: } \quad b = 10 - 2c$$

$$\text{II in III = V} \quad b = -8 + 4c$$

$$\text{IV = V: } \quad c = 3 \quad \text{mit } a=c \quad \text{folgt auch gleich } a = 3$$

$$c \text{ in IV } \rightarrow \quad b = 4$$

$$\text{Lösung: } L = \{(3,4,3)\}$$

c) Vorsicht: Auf dem Arbeitsblatt steht die Variable z in der 2. Gleichung, gemeint ist aber b.

$$\text{I: } 20x+5b+y=42,5 \quad \rightarrow \quad y = 42,5 - 20x - 5b$$

$$\text{II: } x+y+b=6 \quad y = 6 - x - b$$

$$\text{III: } 3b-4x+y=2,5 \quad y = 2,5 - 4x - 3b$$

$$\text{I = II = IV : } \quad -4b = -36,5 + 19x$$

$$\text{II = III = V : } \quad \begin{aligned} -2b &= 3,5 - 5x \quad | \cdot 2 \\ -4b &= 7 - 10x \end{aligned}$$

$$\text{IV = V = VI : } \quad \begin{aligned} -36,5 + 19x &= 7 - 10x \\ x &= 1,5 \end{aligned}$$

$$x \text{ in V: } \quad \begin{aligned} -4b &= 7 - 10(1,5) \\ b &= 2 \end{aligned}$$

$$x, b \text{ in II: } \quad \begin{aligned} 1,5 + 2 + y &= 6 \\ y &= 2,5 \end{aligned}$$

$$\text{Lösung: } L = \{(1,5 \mid 2 \mid 2,5)\}$$

d)

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & 3a+9b+6c=33 \mid :3 & \rightarrow a+3b+2c=11 \\ \text{II:} & a+b-4c=4 & \\ \text{III:} & a+2b-3a+4c+a-3b=-8a & \rightarrow 7a-b+4c=0 \rightarrow b=+7a+4c \end{array}$$

$$\text{III in I = IV: } a + 3(7a+4c)+2c = 11$$

$$22a + 14c = 11$$

$$\text{III in II = V: } a + (7a+4c) - 4c = 4$$

$$8a = 4$$

$$a = 0,5$$

$$a \text{ in IV: } 22 \cdot (0,5) + 14c = 11$$

$$c = 0$$

$$a, c \text{ in III } b = 7(0,5) + 4 \cdot 0 = 3,5$$

$$L = \{(0,5 \mid 3,5 \mid 0)\}$$

Lineare Gleichungen 3 Unbekannten

Lösungsskizze zur Aufgabe 4a

$$\begin{array}{llll} \text{I} & 3a+2c-2,5b=4c+a-(5b-1a) & \rightarrow & a+2,5b-2c=0 \\ \text{II} & 4b+a=3c & \rightarrow & a+4b-3c=0 \\ \text{III} & 4a+3c-b=3c+b & \rightarrow & 4a-2b=0 \rightarrow b=2a \end{array}$$

$$\text{III in I = IV: } a + 5a - 2c = 0 \rightarrow 3a = c$$

$$\text{III in II = V: } a + 8a - 3c = 0 \rightarrow 3a = c$$

$$\text{IV in V = VI } 3a = 3a$$

Das ist eine wahre Aussage. Das bedeutet es gibt unendlich viele Lösungen. Aber man kann für a, b, c nicht irgendwelche beliebigen Zahlen einsetzen, da ja gilt: $b = 2a$ und $c = 3a$.

Die Lösungen können also folgender Form sein: $L = \{(a, 2a, 3a)\}$

Wähle z. B. für $a = 1$, dann ist $L = \{(1, 2, 3)\}$ eine Lösung oder für $a=5$ ist $L = \{(5, 10, 15)\}$ eine Lösung.

Kommt es beim Rechnen zu einer unwahren Aussage z. B. $2 = 5$, dann ist das LGS nicht lösbar.

4b)

$$\begin{array}{ll} \text{I} & z = 2y+2x \\ \text{II} & 2z - 10x = 5 \rightarrow 10x + 2z = 5 \\ \text{III} & 3y - 2x = z - 2,5 \rightarrow -2x + 3y - z = -2,5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{I in II} = \text{IV} : & 2(2y+2x) - 10x = 5 \\ & 4y + 4x - 10x = 5 \\ & -6x + 4y = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I in III} = \text{V} : & -2x + 3y - (2y+2x) = -2,5 \\ & -4x + y = -2,5 \quad \rightarrow y = 4x - 2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V in IV} = \text{VI} : & -6x + 4(4x-2,5) = 5 \\ & -6x + 16x - 10 = 5 \\ & 10x = 15 \\ & \mathbf{x = 1,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{x in V} : & y = 4(1,5) - 2,5 \\ & \mathbf{y = 3,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{x, y in I} : & z = 2(3,5) + 2(1,5) \\ & \mathbf{z = 10} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{I} \quad 3b - 6a = c + 9 & \quad \rightarrow -6a + 3b - c = 9 \\ \text{II} \quad a + b + c = 3b & \quad \rightarrow a - 2b + c = 0 \quad \rightarrow a = 2b - c \\ \text{III} \quad 11b - 6a = 15c + 1 & \quad \rightarrow -6a + 11b - 15c = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II in I} = \text{IV} : & -6(2b-c) + 3b - c = 9 \\ & -12b + 6c + 3b - c = 9 \\ & -9b + 5c = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II in III} = \text{V} : & -6(2b-c) + 11b - 15c = 1 \\ & -12b + 6c + 11b - 15c = 1 \\ & -b - 9c = 1 \\ & b = -9c - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V in IV} = \text{VI} : & -9(-9c-1) + 5c = 9 \\ & 81c + 9 + 5c = 9 \quad | -9 \\ & 81c = 0 \quad \rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

$$\text{c in V} : b = -9(0) - 1 \rightarrow b = -1$$

$$\text{c, b in II} : a = 2(-1) - (0) = -2$$

$$L = \{(-2, -1, 0)\}$$

4d)

$$\begin{aligned} \text{I} \quad a + 2b - 3c = 0 & \quad \rightarrow a = -2b + 3c \\ \text{II} \quad 5a + 3b - 6c = 5 & \\ \text{III} \quad 12a + 4b + 4c = 50 & \end{aligned}$$

$$\text{I in II} = \text{IV} : 5(-2b+3c) + 3b - 6c = 5$$

$$\begin{aligned} -10b+15c + 3b - 6c &= 5 \\ -7b + 9c &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I in III} = \text{V: } 12(-2b+3c) + 4b + 4c &= 50 \\ -24b + 36c + 4b + 4c &= 50 \\ -20b + 40c &= 50 \\ b &= 2c - 2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V in IV} = \text{VI: } -7(2c - 2,5) + 9c &= 5 \\ -14c + 17,5 + 9c &= 5 \\ -5c &= -12,5 \\ c &= 2,5 \end{aligned}$$

$$\text{c in V} \quad b = 2(2,5) - 2,5 = 2,5$$

$$\text{b,c in I} \quad a = -2b + 3c = 2,5$$

$$L = \{(2,5 ; 2,5 ; 2,5)\}$$